

## 江苏省 2021 年普通高校专转本选拔考试

## 高等数学 试题卷

注意事项:

1. 本试卷分为试题卷和答题卡两部分, 试题卷共 3 页. 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 2. 必须在答题卡上作答, 作答在试题卷上无效. 作答前务必将自己的姓名和准考证号准确清晰地填写在试题卷和答题卡, 上的指定位置.

3. 考试结束时, 须将试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在下列每小题中选出一个正确答案, 请在答题卡. 上将所选项的字母标号涂黑)

1. 将  $x \rightarrow 0$  时的无穷小  $\alpha(x) = 1 - (\cos x)^2$ ,  $\beta(x) = e^{(x^2)} - 1$ ,  $\gamma(x) = x(\tan x)^2$ . 排列起来, 使排在后面的一个比前面一个的高阶无穷小, 则正确的排序是

- A.  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\beta(x)$       B.  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\alpha(x)$       C.  $\beta(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$       D.  $\gamma(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\alpha(x)$

2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} e^{a/x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sin x / (x^a), & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内处处连续, 则常数  $a$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, 0)$       B.  $(0, +\infty)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(1, +\infty)$

3. 若函数  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 且  $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ , 则  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(1-2x)}{x} =$

- A. -4      B. -1      C. 1      D. 4

4. 若函数  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则常数  $a, b$  的值分别为

- A.  $-\frac{1}{2}, 1$       B.  $\frac{1}{2}, 1$       C. -2, 0      D. 0, 1

5. 设  $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 其中函数  $f$  具有二阶导数, 则  $\frac{d^2y}{dx^2} =$

A.  $\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)$

B.  $-\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)$

C.  $\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)$

D.  $-\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)$

6. 设常数  $p \in (0, 1)$ , 则反常积分  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  与  $I_2 = \int_1^{+\infty} p^x dx$  的敛散性为

A.  $I_1$  与  $I_2$  都收敛B.  $I_1$  与  $I_2$  都发散C.  $I_1$  收敛,  $I_2$  发散D.  $I_1$  发散,  $I_2$  收敛

7. 下列级数发散的是

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$

8. 二次积分  $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$  在极坐标系下可表示为

A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(\rho^2) \rho d\rho$

B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 f(\rho^2) \rho d\rho$

C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1-\cos\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$

D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} f(\rho^2) \rho d\rho$

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ , 则常数  $k = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$

10. 已知  $\vec{a}=(2, -3, 4)$ ,  $\vec{b}=(2, 2, -1)$ , 则  $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) =$      ▲    

11. 设函数  $f(x) = \frac{x^{2021}-1}{x}$ , 则  $f^{(2021)}(1) =$      ▲    

12. 设曲线  $\begin{cases} x = 3 + t + t^2 \\ y = 12 + 10t - 2t^2 \end{cases}$  在点 P 处的切线方程为  $y=2x + 10$ , 则切点 P 的坐标为     ▲    

13. 设  $\ln(1+x^2)$  是函数  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int_0^1 f'(x)dx =$      ▲    

14. 设常数  $a>0$ , 若幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^n}$  的收敛区间为  $(-1, 3)$ , 则  $a =$      ▲    

### 三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arctan x} \right)$

16. 求不定积分  $\int x \cos(2x-3) dx$

17. 求定积分  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

18. 已知直线 L 在平面 //1:  $x+y+z-1=0$  上, 且通过平面 //1 与 x 轴的交点, 又与平面 //2:  $x+2y+3z+6=0$  平行, 求直线 L 的方程.

19. 设函数  $z=y^3 f\left(\frac{x}{y}, e^x\right)$ , 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

20. 设  $z=z(x, y)$  是由方程  $z^3 - 3x^2z - 6yz + 3x - 3y = 1$  所确定的二元函数, 求  $dz|_{y=0}^{x=0}$

21. 计算二重积分  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中 D 是由曲线  $y=x^2 (x \leq 0)$  与直线  $y=x$  及  $y=1$  所围成的平面闭区域.

22. 设函数  $y=f(x)$  是微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  满足初始条件  $y(0) = y'(0) = 1$  的特解, 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$  的通解.

### 四、证明题(本大题 10 分)

23. 证明: 当  $x > 0$  时,  $2 - \frac{e}{x} \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$

**五、综合题(本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)**

24. 设  $D$  是由曲线  $y=1-ax^2$ ,  $y=\frac{1}{a}x^2$  ( $x \geq 0$ ,  $a > 0$ ) 与  $y$  轴所围成的平面图形.

- (1) 求  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积  $V(a)$ ;
- (2) 问  $a$  为何值时,  $V(a)$  取最大值? 并求此时  $D$  的面积.

25. 设可导函数  $f(x)$  满足方程  $f(x) + \int_0^x tf(t)dt = 1$ , 求:

- (1) 函数  $f(x)$  的解析式;
- (2) 曲线  $y=f(x)$  的凹凸区间与拐点;
- (3) 曲线  $y=f(x)$  的渐近线.

